

**INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ**

B-dul Mihai Viteazu nr.32, 300222, Timișoara,

Tel +40 (0)256 305799/

Fax +40 (0)256 490430, +40 (0)256 490429

registratura@isjtm.ro, www.isj.tm.edu.ro

Operator de date cu caracter personal nr.18818

**MINISTERUL EDUCAȚIEI****Concursul Național de Matematică „OLIMPIADA SATELOR DIN ROMÂNIA”****Etapa județeană , TIMIȘOARA****4.03.2023****Clasa a VII-a****BAREM DE NOTARE****Subiectul 1**

a) Arătați că numărul $\sqrt{\left(\frac{12}{11} + \frac{23}{22} + \frac{34}{33} + \dots + \frac{89}{88} + \frac{100}{99}\right) - \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{22} + \frac{1}{33} + \dots + \frac{1}{88} + \frac{1}{99}\right)}$ este număr natural.

b) Fie numerele $a = 100^{-1} + 99^{-1} + 98^{-1} + \dots + 10^{-1}$ și

$$b = \frac{1}{1+99^{-1}} + \frac{1}{1+98^{-1}} + \frac{1}{1+97^{-1}} + \dots + \frac{1}{1+9^{-1}}$$

Arătați că partea întreagă a numărului $\sqrt{a+b}$ este 9.

Soluție:

a) $\sqrt{\left(\frac{12}{11} - \frac{1}{11}\right) + \left(\frac{23}{22} - \frac{1}{22}\right) + \left(\frac{34}{33} - \frac{1}{33}\right) + \dots + \left(\frac{89}{88} - \frac{1}{88}\right) + \left(\frac{100}{99} - \frac{1}{99}\right)} =$
 $\sqrt{1+1+1+1+1+1+1+1+1+1} = \sqrt{9} = 3$ este număr natural 3puncte

b)

$$a = \frac{1}{100} + \frac{1}{99} + \frac{1}{98} + \dots + \frac{1}{10} \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

$$b = \frac{99}{100} + \frac{98}{99} + \frac{97}{98} + \dots + \frac{9}{10} \dots\dots\dots 1\text{punct}$$

de unde obține suma lor $a + b = 91$ 1punct

$$\text{Cum } 9 = \sqrt{81} < \sqrt{91} < \sqrt{100} = 10 \Rightarrow [\sqrt{a+b}] = 9 \dots\dots\dots 1\text{punct.}$$

Subiectul 2

a) Calculați media geometrică a numerelor $a = \frac{\sqrt{28} - \sqrt{20}}{\sqrt{3} + 1}$ și $b = \frac{\sqrt{12} + 2}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$.

b) Raportul dintre numerele naturale x și y este $\frac{4}{9}$. Media geometrică a celor două numere este 48.

Aflați cele două numere.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

B-dul Mihai Viteazu nr.32, 300222, Timișoara,
Tel +40 (0)256 305799/
Fax +40 (0)256 490430, +40 (0)256 490429
registratura@isjtm.ro, www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818



MINISTERUL EDUCAȚIEI

a) $a = \frac{2\sqrt{7}-2\sqrt{5}}{\sqrt{3}+1} = \frac{2\cdot(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{\sqrt{3}+1}$ 1punct

$b = \frac{2\sqrt{3}+2}{\sqrt{7}-\sqrt{5}} = \frac{2\cdot(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$ 1punct

$M_g = \sqrt{a \cdot b} = 2$ 1punct

b) $\frac{x}{y} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{9} = k, k > 0$ 1punct.

$\Rightarrow \begin{cases} x = 4k \\ y = 9k \end{cases}$ 1punct

$M_g = 48 \Rightarrow \sqrt{x \cdot y} = 48 \Rightarrow \sqrt{4k \cdot 9k} = 48 \xrightarrow{k>0} 6k = 48 \Rightarrow k = 8 \Rightarrow \begin{cases} x = 32 \\ y = 72 \end{cases}$ 2 puncte

Subiectul 3

Fie trapezul ABCD cu $AB \parallel CD, AB > CD, AB = 2 \cdot AD = 2 \cdot CD$, M mijlocul lui AB, $AC \cap DM = \{N\}, MC \cap BD = \{P\}$.

a) Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic ;

b) Arătați că $\mathcal{A}_{PMB} = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$.

Soluție:

a) $AM \parallel CD, AM = CD \Rightarrow AMCD$ paralelogram..... 1punct

$AM = AD \Rightarrow AMCD$ romb $\Rightarrow AC \perp DM$ (1)..... 1punct

$BM \parallel CD, BM = CD \Rightarrow BMDC$ paralelogram $\Rightarrow DM \parallel BC$ (2)..... 1punct

Din (1) și (2) $\Rightarrow AC \perp BC \Rightarrow$ triunghiul ABC este dreptunghic în C..... 1punct

b) $AMCD$ paralelogram $\Rightarrow \mathcal{A}_{DCM} = \mathcal{A}_{ADM} = S$

$DCBM$ paralelogram $\Rightarrow \mathcal{A}_{DCM} = \mathcal{A}_{BCM} = S$

$\Rightarrow \mathcal{A}_{ABCD} = 3S$2 puncte

BP mediană în triunghiul MBC $\Rightarrow \mathcal{A}_{PMB} = \frac{1}{2} \cdot \mathcal{A}_{BCM} = \frac{1}{2} \cdot S = \frac{3}{6} \cdot S = \frac{1}{6} \cdot \mathcal{A}_{ABCD}$1punct

Subiectul 4

Fie AB un diametru al cercului $\mathcal{C}(O,r)$. Prin punctul P, mijlocul lui OA, construim perpendiculara pe AB care intersectează cercul în C și D. Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în M. Arătați că A este mijlocul segmentului OM.

Soluție:

În triunghiul AOC, CP este mediană și înălțime, deci triunghiul este isoscel, cu baza AO....2 puncte



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN TIMIȘ

B-dul Mihai Viteazu nr.32, 300222, Timișoara,
Tel +40 (0)256 305799/
Fax +40 (0)256 490430, +40 (0)256 490429
registratura@isjtm.ro, www.isj.tm.edu.ro
Operator de date cu caracter personal nr.18818



MINISTERUL EDUCAȚIEI

$OC=AC=AO$, deci triunghiul AOC este echilateral1punct
Tangenta este perpendiculară pe rază, deci triunghiul MCO este dreptunghic, unghiul O are 60° ,
rezultă că $\sphericalangle CMO = 30^\circ$ 2 puncte

Din teorema unghiului de 30° rezultă că $OC = \frac{OM}{2}$, deci OA este jumătate din $OM \Rightarrow A$ este mijlocul
segmentului OM 2 puncte